

大规模 MIMO-TRDMA 系统中的改进 SOR 信号检测算法

王明月^{1,2}, 李方伟^{1,2}, 景小荣¹, 张海波^{1,2}, 熊军洲^{1,2}

(1. 重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065; 2. 移动通信教育部工程研究中心, 重庆 400065)

摘 要: 在大规模多输入多输出时间反演多址 (MIMO-TRDMA, multiple-input multiple-output time-reversal division multiple access) 系统中, 传统的线性最小均方误差 (MMSE, minimum mean square error) 算法可获得近似最佳的检测性能。但是, MMSE 检测算法所需的矩阵求逆计算复杂度过高, 无法确保信号检测的实时处理。针对这一问题, 提出一种改进的连续超松弛 (SOR, successive over-relaxation) 信号检测算法。所提算法通过更新求解线性方程组, 避免复杂的矩阵求逆计算; 同时, 采用最陡下降的思想提高 SOR 更新的搜索效率, 以加快收敛速度和提高检测性能。仿真结果表明, 所提算法能以较少的更新次数获得与传统 MMSE 算法相当的近似最佳性能, 而计算复杂度数量级从 $O(M^3)$ 降低到 $O(M^2)$ 。

关键词: 大规模多输入多输出系统; 时间反演多址接入; 连续超松弛算法; 最陡下降算法

中图分类号: TN92

文献标识码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2021205

Improved SOR signal detection algorithm in massive MIMO-TRDMA systems

WANG Mingyue^{1,2}, LI Fangwei^{1,2}, JING Xiaorong¹, ZHANG Haibo^{1,2}, XIONG Junzhou^{1,2}

1. School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

2. Engineering Research Center of Ministry of Education of Mobile Communication, Chongqing 400065, China

Abstract: In the massive multi-input multi-output time-reversal division multiple access (MIMO-TRDMA) systems, the traditional linear minimum mean square error (MMSE) algorithm achieved approximately the best performance. However, the matrix inversion of the MMSE algorithm was too complicated to ensure real-time processing of signal detection. To solve this problem, an improved successive over-relaxation (SOR) signal detection optimization algorithm was proposed. The proposed algorithm reasonably upgraded the solution of linear equations to prevent the complicated calculation of matrix inversion. Meanwhile, the steepest descent idea was used to provide an effective search direction for the SOR signal detection algorithm, achieving a rapid convergence rate and stronger inspection performance. The simulation results show that the proposed algorithm has the similar best performance with fewer update times compared with the traditional MMSE algorithm, and the calculation complexity is reduced from $O(M^3)$ to $O(M^2)$.

Keywords: massive MIMO, TRDMA, SOR algorithm, SD algorithm

1 引言

大规模多输入多输出时间反演多址 (MIMO-

TRDMA, multiple-input multiple-output time-reversal division multiple access) 系统是大规模 MIMO 系统与 TRDMA 接入技术的结合。大规模 MIMO 系统

收稿日期: 2021-07-11; 修回日期: 2021-10-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61771084); 重庆市教育委员会科学技术基金资助项目 (No.KJQN201800834); 重庆市研究生科研创新基金资助项目 (No.CYB21200)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61771084), The Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission (No.KJQN201800834), Chongqing Graduate Scientific Research Innovation Project (No.CYB21200)

通过在基站端配置大量天线（多达数百根）同时为少量用户设备服务，能够有效地提升频谱效率和能量效率^[1-3]。而与 TRDMA 技术相结合，可有效提升大规模 MIMO 系统抗多径干扰的能力^[4-5]。大规模 MIMO-TRDMA 系统因其具有高传输率和高可靠性等显著优势，有望发展为未来无线通信系统的主要研究方向之一。

在实际工程中部署大规模 MIMO-TRDMA 系统还存在一些具有挑战性的问题，其中之一是如何设计具有高性能和低复杂度的上行信号检测算法。最大似然 (ML, maximum likelihood) 检测算法具有最佳的检测性能，但其计算复杂度随着发送天线数目的增加呈指数增长，因而难以应用于实际^[6]。由于大规模 MIMO-TRDMA 系统中基站天线数目远大于用户设备数目，此时各用户间信道满足近似正交的关系，因此，采用传统的线性检测算法，如迫零算法和最小均方误差 (MMSE, minimum mean square error) 算法，也能确保检测性能近似最佳^[7-8]。然而，线性检测算法需要计算高维矩阵的逆，尽管采用传统的 Cholesky 分解和 LDL 分解等方法可避免高维矩阵求逆，但仍无法确保信号检测的实时性^[9-10]。

为了解决这一问题，国内外学者相继提出了诸多 MMSE 算法的近似求解算法，主要包括三大类：第一类是级数展开类，文献[11]提出一种低复杂度信号检测算法，通过 Neumann 近似级数展开方法将矩阵求逆计算等价于多次矢量相乘计算；文献[12]基于大规模非正交多址接入系统提出了一种 Neumann 级数逼近信号检测算法，该算法能以较低的计算复杂度获得较好的系统性能。第二类是更新近似求解类，文献[13]基于 Gauss-Seidel 方法提出了一种能够获得近似最佳性能的检测算法，优化了算法的初始解以加快算法的收敛速度；文献[14]提出了一种基于连续超松弛 (SOR, successive over-relaxation) 的高效算法，同时，该文献还对所提算法进行了硬件验证。第三类是基于矩阵梯度搜索类，文献[15]提出了一种在共轭梯度算法中直接计算信噪比 (SNR, signal-to-noise ratio) 的新方法，以实现共轭梯度软输出检测；文献[16]提出了一种联合最陡下降 (SD, steepest descent) 和 Jacobi 更新算法的改进算法，采用 SD 算法为后续 Jacobi 更新确定高效的搜索方向，进而提升系统的检测性能。

上述算法中，传统 SOR 算法具有性能近似最

佳、收敛速度较快和计算复杂度较低等优势，但存在初始收敛性能较差的缺点；而 SD 算法具有在初始更新时就可获得较好收敛方向的优势，但存在极值点附近收敛速度较慢的缺点。因此，本文结合 SOR 算法和 SD 算法的优势，基于大规模 MIMO-TRDMA 系统提出一种改进 SOR 信号检测算法。将 SD 算法和 SOR 算法的第一次混合更新解设为改进 SOR 算法的第一次更新解，提高后续 SOR 更新的搜索效率，获得更快的收敛速度和更好的检测性能。仿真结果表明，即使更新次数较少，所提改进 SOR 算法仍具有与传统 MMSE 算法相当的近似最佳性能。

2 系统模型及 MMSE 检测算法

2.1 大规模 MIMO-TRDMA 系统模型

大规模 MIMO-TRDMA 系统的系统模型如图 1 所示，其中，基站端配备 N_r 根接收天线，同时为 M 个单天线用户设备服务，通常情况下满足 $N_r \gg M$ 。大规模 MIMO-TRDMA 通信过程分为 3 步，具体如下。

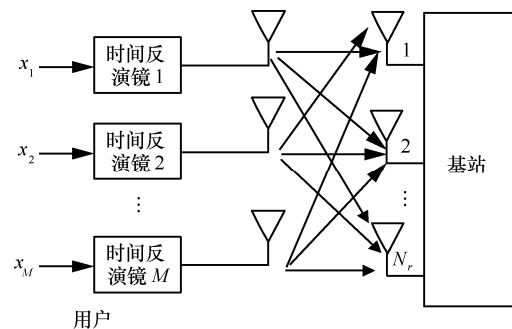


图 1 大规模 MIMO-TRDMA 系统模型

2.1.1 信道探测阶段

信道探测阶段是用户发送信号前的准备阶段，各个用户接收基站端发送的探测信号并分别提取各自的信道冲激响应。基站端第 $j \in \{1, 2, \dots, N_r\}$ 根接收天线和第 $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ 个用户的信道冲激响应为

$$h_j^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{j,l}^{(m)} \delta(t - \tau_{j,l}^{(m)}) \quad (1)$$

其中， L 为非零多径总数， $l \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ ； $\alpha_{j,l}^{(m)}$ 是第 j 根接收天线与第 m 个用户间第 l 个多径的幅值， $\tau_{j,l}^{(m)}$ 是第 j 根接收天线与第 m 个用户间第 l 个多径的时延； $h_j^{(m)}(t)$ 在时域中离散后为

$$\mathbf{h}_j^{(m)} = [h_j^{(m)}[0], h_j^{(m)}[1], \dots, h_j^{(m)}[L-1]]^T.$$

2.1.2 时间反演阶段

在时间反演阶段中, 位于用户附近的各时间反演镜在时域或频域上分别对各信道冲激响应进行采样和傅里叶变换/逆变换, 将时间反演滤波矩阵写为 $\mathbf{g}_j^{(m)} = [g_j^{(m)}[0], g_j^{(m)}[1], \dots, g_j^{(m)}[L-1]]^T$, 每个元素可表示为

$$g_j^{(m)}[p] = \frac{\sqrt{\overline{h_j^{(m)}[L-1-p]}}}{\sqrt{E[\|\mathbf{h}_j^{(m)}\|^2]}} = \frac{\sqrt{\overline{h_j^{(m)}[L-1-p]}}}{\sqrt{E\left[\sum_{l=0}^{L-1} |h_j^{(m)}[l]|^2\right]}} \quad (2)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示求 Frobenius 范数操作, $\overline{(\cdot)}$ 为取共轭操作。

2.1.3 时间反演后的通信阶段

在正式通信过程中, 将发送信号矢量经过时间反演镜处理后的信道冲激响应 $\mathbf{h}_j^{(m)}$ 变换为 $\mathbf{h}_j^{(m)} * \mathbf{g}_j^{(m)}$, 可表示为

$$\begin{aligned} (h_j^{(m)} * g_j^{(m)})[p] &= \sum_{l=0}^{L-1} h_j^{(m)}[l] g_j^{(m)}[p-l] = \\ &= \frac{\sum_{l=0}^{L-1} h_j^{(m)}[l] \sqrt{\overline{h_j^{(m)}[L-1+l-p]}}}{\sqrt{E\left[\sum_{l=0}^{L-1} |h_j^{(m)}[l]|^2\right]}} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $(\cdot) * (\cdot)$ 表示求卷积操作, $p \in \{0, 1, \dots, 2L-2\}$ 。当 $p = L-1$ 时, 式(3)对应最大功率中心峰值。

根据式(3), 将大规模 MIMO-TRDMA 信道模型写为矩阵形式

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1^{(1)} & H_1^{(2)} & \dots & H_1^{(M)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(2)} & \dots & H_2^{(M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N_r}^{(1)} & H_{N_r}^{(2)} & \dots & H_{N_r}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, \mathbf{H} 为 $N_r \times M$ 维矩阵, 同时

$$H_j^{(m)} = \sum_{p=0}^{2L-1} (h_j^{(m)} * g_j^{(m)})[p].$$

为了维持信道稳定性, 假定信道探测阶段和时间反演阶段的信道状态信息具有时不变特性。即对于一个时间反演操作过程, 至少一个信道探测阶段和时间反演阶段的信道冲激响应保持静止。

将基站端接收的信号表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_r}]$ 为 $N_r \times 1$ 维接收信号向量; \mathbf{H} 为多径瑞利衰落信道, 每个元素服从均值为零且方差为 e^{-T_s/σ_τ} 的循环对称复高斯 (CSCG, circular symmetric complex Gaussian) 分布, $0 \leq l \leq L$, T_s 表示采样周期, σ_τ 表示信道均方根时延扩展; $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$ 为 $M \times 1$ 维的发送信号矢量; \mathbf{n} 表示均值为零且方差为 σ^2 的加性白高斯噪声 (AWGN, additive white Gaussian noise), 满足 $\mathbf{n} \sim (0, \sigma^2 \mathbf{I}_{N_r})$, 维度为 $N_r \times 1$ 。在每个信号检测时刻, 假定基站端已获得当前信道的理想状态信息。

为了方便分析, 将式(5)中每根接收天线上的信号展开为

$$\begin{aligned} Y_j &= \sum_{p=0}^{2L-1} \sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_j^{(m)}) x_m + n_j = \\ &= \sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_j^{(m)}) [L-1] x_m + \\ &= \sum_{p=0}^{2L-1} \sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_j^{(m)}) [p] x_m + \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_r} \sum_{p=0}^{2L-1} \sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_i^{(m)}) [p] x_m + n_j \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_j^{(m)}) [L-1] x_m$ 是基站端接收的主要期望信号, 当 $p = L-1$ 时, 对应最大功率中心峰值;

$\sum_{p=0}^{2L-1} \sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_j^{(m)}) [p] x_m$ 是用户间的干扰, 相当于其他用户对当前用户的干扰, 此时, $p \neq L-1$;

$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_r} \sum_{p=0}^{2L-1} \sum_{m=1}^M (h_j^{(m)} * g_i^{(m)}) [p] x_m$ 表示基站端接收天线之间的干扰, 即第 $i (i \neq j)$ 根天线对第 j 根天线的干扰; n_j 表示系统的 AWGN。

由式(6)可知, 大规模 MIMO-TRDMA 系统中的主要期望信号对应最大功率中心峰值因而具有良好的聚焦特性。因此, 相比传统大规模 MIMO 系统, 大规模 MIMO-TRDMA 系统能够利用多径产生聚焦效应, 从而降低用户间干扰, 具有更好的系统性能。

大规模 MIMO-TRDMA 系统和大规模 MIMO 系统的误比特率 (BER, bit error rate) 性能对比如图 2 所示, 接收端采用传统 MMSE 信号检测算法。从图 2 可知, 相比传统大规模 MIMO 系统, 大规模 MIMO-TRDMA 系统具有更好的系统性能, 具体表

现为：当 $L=8$ 且 BER 为一个确定值时，大规模 MIMO-TRDMA 系统比大规模 MIMO 系统的 SNR 低至少 1 dB；当 $L=10$ 且 BER 为一个确定值时，大规模 MIMO-TRDMA 系统比大规模 MIMO 系统的 SNR 低约 2 dB。这是因为大规模 MIMO-TRDMA 系统能够利用多径产生聚焦效应使主要期望信号对应最大功率中心峰值，能够有效降低用户间干扰。

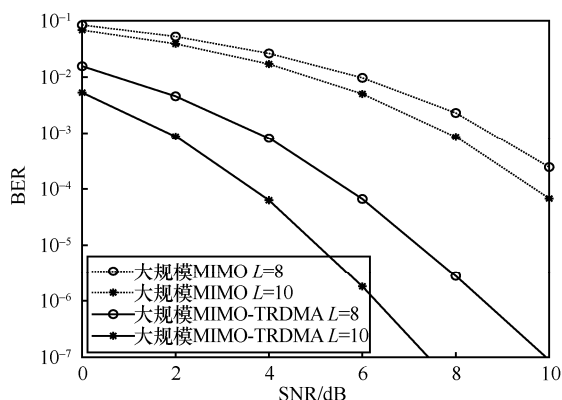


图 2 大规模 MIMO-TRDMA 和大规模 MIMO 系统性能对比

2.2 MMSE 检测算法

信号检测的主要任务是基站端根据接收的信号矢量 \mathbf{Y} 对发送信号进行译码，得到估计的发送信号矢量 $\hat{\mathbf{x}}$ 。传统 MMSE 信号检测中，估计的发送信号矢量 $\hat{\mathbf{x}}$ 为

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{Y} = \mathbf{U}^{-1} \hat{\mathbf{Y}} \quad (7)$$

其中， $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}^H \mathbf{Y}$ 。MMSE 检测算法的加权矩阵表示为

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (8)$$

其中， $\mathbf{V} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$ 为 Gram 矩阵。直接对 MMSE 检测算法的加权矩阵 \mathbf{U} 求逆时，计算复杂度为较高的 $O(M^3)$ [8]。

基于式(8)，大规模 MIMO-TRDMA 系统中 MMSE 检测算法估计的发送信号矢量变为

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{Y} = \left((\mathbf{h} * \mathbf{g})^H (\mathbf{h} * \mathbf{g}) + \sigma^2 \mathbf{I}_M \right)^{-1} (\mathbf{h} * \mathbf{g})^H \mathbf{Y} \quad (9)$$

在大规模 MIMO-TRDMA 系统中，信道为复杂的卷积矢量，采用传统 MMSE 检测算法将更加复杂；同时，随着基站端接收天线和用户数量的增加，直接对矩阵求逆的计算复杂度为较高的 $O(M^3)$ 。因此，传统 MMSE 检测算法难以满足大规模 MIMO-TRDMA 系统中信号检测的实时性要求。

3 改进 SOR 信号检测算法

本节首先证明了大规模 MIMO-TRDMA 系统的 MMSE 加权矩阵具有对称正定的特性，这是 SOR 算法的基础；然后给出了所提出改进 SOR 算法的基本原理；最后证明了所提算法的收敛性，以确保其实际可行性。

3.1 对称正定证明

将式(5)中的复数系统模型转换为对应的实值模型

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (10)$$

其中， $\tilde{\mathbf{Y}} = [\text{Re}\{\mathbf{Y}\}, \text{Im}\{\mathbf{Y}\}]^T$ 是 $2N_r \times 1$ 维矢量， $\tilde{\mathbf{x}} = [\text{Re}\{\mathbf{x}\}, \text{Im}\{\mathbf{x}\}]^T$ 为 $2M \times 1$ 维矢量， $\tilde{\mathbf{n}} = [\text{Re}\{\mathbf{n}\}, \text{Im}\{\mathbf{n}\}]^T$ 是 $2N_r \times 1$ 维矢量，同时

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{\mathbf{H}\} & -\text{Im}\{\mathbf{H}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{H}\} & \text{Re}\{\mathbf{H}\} \end{bmatrix}_{2N_r \times 2M} \quad (11)$$

在式(11)的实数系统模型中，信道矩阵的转置和信道矩阵的共轭转置结果相同。因此，可得

$$\tilde{\mathbf{V}}^T = (\tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{H}})^T = (\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}})^T \quad (12)$$

式(12)表明 Gram 矩阵 $\tilde{\mathbf{V}}$ 是对称的，根据文献[8]可知，信道矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}$ 的列矢量具有近似正交的特性。因此，对于任何 $2M \times 1$ 维的非零实值矢量 $\tilde{\mathbf{r}}$ ，可得

$$(\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{r}})^T \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{\mathbf{r}})^T \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{r}} > 0 \quad (13)$$

其中， $\tilde{\mathbf{V}}$ 是正定的。从式(12)和式(13)可知， $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{H}}$ 是对称的正定矩阵；同时， σ^2 大于零，因此，大规模 MIMO-TRDMA 系统的 MMSE 加权矩阵 $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}} + \sigma^2 \mathbf{I}_M$ 也是对称的正定矩阵。

3.2 算法原理

3.2.1 传统 SOR 算法原理

SOR 算法可用于求解 N 维线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{b}$ ，其中，矩阵 \mathbf{A} 的维度是 $N \times N$ ，该矩阵是对称的正定矩阵； \mathbf{s} 为 $N \times 1$ 维的解矢量； \mathbf{b} 为 $N \times 1$ 维的测量矢量。传统 MMSE 算法直接计算 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 得到 \mathbf{s} ，而 SOR 算法通过高效地更新求解线性方程，能够避免复杂的矩阵求逆计算。由于矩阵 \mathbf{A} 是对称的正定矩阵，可将其分解为对角线分量 \mathbf{D}_A ，严格的下三角形分量 \mathbf{L}_A 和严格的上三角形分量 \mathbf{L}_A^T 。SOR 算法的更新形式为

$$(\mathbf{L}_A + \frac{1}{\alpha} \mathbf{D}_A) \mathbf{s}^{(k+1)} = [(\frac{1}{\alpha} - 1) \mathbf{D}_A - \mathbf{L}_A^T] \mathbf{s}^{(k)} + \mathbf{b} \quad (14)$$

其中，上标 k 表示更新次数， α 表示松弛参数，可以根据松弛参数确定算法的收敛效率和收敛速度。当 $\alpha=1$ 时，SOR 算法等价于 Gauss-Seidel 算法，可以看出，Gauss-Seidel 算法是 SOR 算法的特例。

由于上行大规模 MIMO-TRDMA 系统中的 MMSE 加权矩阵 \tilde{U} 具有对称正定的特性，因此，可用 SOR 算法以较低的计算复杂度高效求解式(9)。将大规模 MIMO-TRDMA 系统的 MMSE 加权矩阵分解为

$$\tilde{U} = D_{\tilde{v}} + L_{\tilde{v}} + L_{\tilde{v}}^T \quad (15)$$

其中， $D_{\tilde{v}}$ 、 $L_{\tilde{v}}$ 、 $L_{\tilde{v}}^T$ 分别表示 \tilde{U} 的对角线分量，严格的下三角形分量和严格的上三角形分量。大规模 MIMO-TRDMA 系统采用 SOR 算法的更新形式可表示为

$$(L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}}) \hat{x}^{(k+1)} = ((\frac{1}{\alpha} - 1) D_{\tilde{v}} - L_{\tilde{v}}^T) \hat{x}^{(k)} + \hat{Y} \quad (16)$$

式(16)左右同时乘以 $(L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1}$ ，SOR 算法的更新形式变为

$$\hat{x}^{(k+1)} = (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} [((\frac{1}{\alpha} - 1) D_{\tilde{v}} - L_{\tilde{v}}^T) \hat{x}^{(k)} + \hat{Y}] \quad (17)$$

其中， $\hat{x}^{(0)}$ 为初始解，传统 SOR 算法通常将其设为 $2M \times 1$ 维的零矢量。

3.2.2 改进 SOR 算法原理

传统 SOR 算法具有性能近似最佳、收敛速度较快和计算复杂度较低等优势，但存在初始收敛性能较差的缺点；而 SD 算法具有在初始更新时就可获得较好收敛方向的优势，但存在极值点附近收敛速度较慢的缺点。因此，结合 SOR 算法和 SD 算法的优势，提出低复杂度和高性能的改进 SOR 算法。将 SD 算法和 SOR 算法的第一次混合更新解设为改进 SOR 算法的第一次更新解，提高后续 SOR 更新的搜索效率，获得更快的收敛速度和更好的检测性能。

将式(5)对应的实值形式转换为线性方程组的表示形式 $\tilde{U} \tilde{x} = \tilde{Y}$ 。其中， \tilde{U} 既是对称的正定矩阵，同时也是对角占优矩阵，因此， \tilde{U}^{-1} 也是对角占优矩阵^[13]。由此，可用 $D_{\tilde{v}}^{-1}$ 代替 \tilde{U}^{-1} ，得到初始解

$$\tilde{x}^{(0)} = D_{\tilde{v}}^{-1} \tilde{Y} \quad (18)$$

由于 $D_{\tilde{v}}$ 是对角矩阵，计算 $D_{\tilde{v}}^{-1}$ 的复杂度相对低

于计算 \tilde{U}^{-1} ，根据式(18)将 $\tilde{x}^{(0)}$ 设为 SD 算法的初始值。

进一步地，将传统 SOR 算法和 SD 算法第一次混合更新结果用 SD 算法的更新形式表示为

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(2)} &= (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} [((\frac{1}{\alpha} - 1) D_{\tilde{v}} - L_{\tilde{v}}^T) \tilde{x}^{(1)} + \tilde{Y}] = \\ &= (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} [(L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}}) - \tilde{U}] \tilde{x}^{(1)} + \tilde{Y} = \\ &= \tilde{x}^{(1)} + (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} (\tilde{Y} - \tilde{U} \tilde{x}^{(1)}) = \\ &= \tilde{x}^{(1)} + (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} r^{(1)} \end{aligned} \quad (19)$$

其中， $r^{(1)} = \tilde{Y} - \tilde{U} \tilde{x}^{(1)}$ ，表示第一次更新后的剩余量。令 $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + ur^{(0)}$ 表示 SD 算法的第一次更新结果， $u = \frac{(r^{(0)})^H r^{(0)}}{(q^{(0)})^H r^{(0)}}$ 表示每次更新的步长， $r^{(0)}$ 表示初始剩余量。将 $r^{(1)}$ 改写为

$$r^{(1)} = \tilde{Y} - \tilde{U}(\tilde{x}^{(0)} + ur^{(0)}) = \tilde{Y} - \tilde{U} \tilde{x}^{(0)} - \tilde{U}ur^{(0)} = r^{(0)} - uq^{(0)} \quad (20)$$

其中， $q^{(0)} = \tilde{U}r^{(0)}$ ，将式(20)和 $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(0)} + ur^{(0)}$ 代入式(19)，可得 SD 算法和 SOR 算法第一次混合更新解，即

$$\tilde{x}^{(2)} = \tilde{x}^{(0)} + ur^{(0)} + (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} (r^{(0)} - uq^{(0)}) \quad (21)$$

为了减少更新次数，改进 SOR 算法的初始值不使用零矢量。而将 SD 算法和 SOR 算法第一次混合更新解设为改进 SOR 算法的第一次更新解，即 $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{x}^{(2)}$ 。进而，利用式(17)继续进行 $k-1$ 次更新，通过设置更新次数 k 对发送信号矢量进行估计。

3.3 改进 SOR 算法收敛性证明

改进 SOR 算法使用更新方式进行信号检测，算法的收敛性决定了算法的精度因而至关重要。因此，有必要分析和证明改进 SOR 算法的收敛性。

令 $E = (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} ((\frac{1}{\alpha} - 1) D_{\tilde{v}} - L_{\tilde{v}}^T)$ 为更新矩阵， $c = (L_{\tilde{v}} + \frac{1}{\alpha} D_{\tilde{v}})^{-1} \tilde{Y}$ 。因此，改进 SOR 算法的更新计算式变换为

$$\hat{x}^{(k+1)} = E \hat{x}^{(k)} + c \quad (22)$$

更新矩阵 E 的谱半径定义为非负数 $\rho(E) = \max_{1 \leq n \leq 2M} |\lambda_n|$ ，其中 λ_n 表示 E 的第 n 个特征值，式(22)收敛的充分必要条件是谱半径满足

$$\rho(\mathbf{E}) = \max_{1 \leq n \leq 2M} |\lambda_n| < 1 \quad (23)$$

根据特征值的定义, 可得

$$\mathbf{E}\mathbf{f} = (\mathbf{L}_{\bar{v}} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{D}_{\bar{v}})^{-1}((\frac{1}{\alpha}-1)\mathbf{D}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}}^T)\mathbf{f} = \lambda_n\mathbf{f} \quad (24)$$

其中, \mathbf{f} 是任意 $2M \times 1$ 维非零实值矢量, 式(24)也可表示为

$$((\frac{1}{\alpha}-1)\mathbf{D}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}}^T)\mathbf{f} = (\mathbf{L}_{\bar{v}} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{D}_{\bar{v}})\lambda_n\mathbf{f} \quad (25)$$

将式(25)左右两边同时乘以 \mathbf{f}^T , 可得

$$\mathbf{f}^T((\frac{1}{\alpha}-1)\mathbf{D}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}}^T)\mathbf{f} = \lambda_n\mathbf{f}^T(\mathbf{L}_{\bar{v}} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{D}_{\bar{v}})\mathbf{f} \quad (26)$$

对式(26)左右两边同时进行转置, 得到

$$\mathbf{f}^T((\frac{1}{\alpha}-1)\mathbf{D}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}})\mathbf{f} = \lambda_n\mathbf{f}^T(\mathbf{L}_{\bar{v}}^T + \frac{1}{\alpha}\mathbf{D}_{\bar{v}})\mathbf{f} \quad (27)$$

因为 $\mathbf{D}_{\bar{v}}$ 是一个对角矩阵, 满足 $\mathbf{D}_{\bar{v}} = \mathbf{D}_{\bar{v}}^T$ 。将式(26)和式(27)相加, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T((\frac{2}{\alpha}-2)\mathbf{D}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}}^T)\mathbf{f} = \\ \lambda_n\mathbf{f}^T(\mathbf{L}_{\bar{v}}^T + \mathbf{L}_{\bar{v}} + \frac{2}{\alpha}\mathbf{D}_{\bar{v}})\mathbf{f} \end{aligned} \quad (28)$$

将 $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{D}_{\bar{v}} + \mathbf{L}_{\bar{v}} + \mathbf{L}_{\bar{v}}^T$ 代入式(28)得到

$$(1 - \lambda_n)(\frac{2}{\alpha} - 1)\mathbf{f}^T\mathbf{D}_{\bar{v}}\mathbf{f} = (1 + \lambda_n)\mathbf{f}^T\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{f} \quad (29)$$

大规模 MIMO-TRDMA 系统的 MMSE 加权矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}$ 和对角矩阵 $\mathbf{D}_{\bar{v}}$ 都具有正定的特性, 同时, 有 $\mathbf{f}^T\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{f} > 0$ 和 $\mathbf{f}^T\mathbf{D}_{\bar{v}}\mathbf{f} > 0$, 此外, 当 $0 < \alpha < 2$, 可得 $\frac{2}{\alpha} - 1 > 0$ 。因此, 可得 $(1 - \lambda_n)(1 + \lambda_n) > 0$, 即

$$|\lambda_n| < 1 \quad (30)$$

将式(30)代入式(23), 可得 $\rho(\mathbf{E}) < 1$, 所以改进 SOR 算法是收敛的。

4 复杂度分析

本节以所需的实数乘法次数作为指标, 研究所提改进 SOR 算法的计算复杂度。传统 MMSE 算法、改进 SOR 算法和传统 SOR 算法都需要计算 $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}^H\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \sigma^2\mathbf{I}_M$, 在信号检测时, 这两部分计算复杂度相同, 因此, 仅对检测算法的其他部分进行分析。传统 SOR 算法的复杂度仅为 SOR 更新, 而改进 SOR 算法的复杂度包括初始赋值和 SOR 更

新两部分。初始赋值和 SOR 更新的复杂度分析具体如下。

1) 初始赋值

初始赋值时需要计算 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\hat{\mathbf{Y}}$, $\mathbf{r}^{(1)} = \hat{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$, $\mathbf{q}^{(0)} = \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{r}^{(0)}$ 和 $u = \frac{(\mathbf{r}^{(0)})^H\mathbf{r}^{(0)}}{(\mathbf{q}^{(0)})^H\mathbf{r}^{(0)}}$, 其中,

计算 $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}\hat{\mathbf{Y}}$ 需要 $2M$ 次乘法, 计算 $\mathbf{r}^{(1)} = \hat{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$ 、 $\mathbf{q}^{(0)} = \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{r}^{(0)}$ 和 $u = \frac{(\mathbf{r}^{(0)})^H\mathbf{r}^{(0)}}{(\mathbf{q}^{(0)})^H\mathbf{r}^{(0)}}$ 分别需要

$4M^2$ 、 $4M^2$ 和 $4M$ 次乘法。结合式(21)第一次混合迭代, 初始赋值共计需要 $8M^2 + 10M$ 次乘法。

2) SOR 更新

$$\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} = (\mathbf{L}_{\bar{v}} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{D}_{\bar{v}})^{-1}[(\frac{1}{\alpha}-1)\mathbf{D}_{\bar{v}} - \mathbf{L}_{\bar{v}}^T]\hat{\mathbf{x}}^{(k)} + \hat{\mathbf{Y}}$$

可看出, SOR 算法第 k 次更新的计算复杂度与计算线性方程组的复杂度相同。结合 $\mathbf{D}_{\bar{v}}$ 、 $\mathbf{L}_{\bar{v}}$ 、 $\mathbf{L}_{\bar{v}}^T$ 的定义, 其解可表示为

$$\hat{x}_n^{(k+1)} = (1 - \alpha)\hat{x}_n^{(k)} + \frac{\alpha}{\tilde{U}_{n,n}}(\hat{Y}_n - \sum_{q < n} \tilde{U}_{n,q}\hat{x}_q^{(k+1)} - \sum_{q > n} \tilde{U}_{n,q}\hat{x}_q^{(k)}) \quad (31)$$

其中, $n, q = 1, 2, \dots, 2M$, $\hat{x}_n^{(k)}$, $\hat{x}_n^{(k+1)}$, \hat{Y}_n 分别表示 $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$, $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$, $\hat{\mathbf{Y}}$ 的第 n 个元素; $\tilde{U}_{n,q}$ 表示加权矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}$ 的第 n 行第 q 列处元素。计算 $(1 - \alpha)\hat{x}_n^{(k)}$ 和 $\frac{\alpha}{\tilde{U}_{n,n}}(\hat{Y}_n - \sum_{q < n} \tilde{U}_{n,q}\hat{x}_q^{(k+1)} - \sum_{q > n} \tilde{U}_{n,q}\hat{x}_q^{(k)})$ 分别需要 1 次乘法和 $2M + 1$ 次乘法, 计算 $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ 中每个元素共计需要 $2M + 2$ 次乘法。而 $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$ 中包含 $2M$ 个元素, 因此, 一次 SOR 更新总共需要 $4M^2 + 4M$ 次乘法计算。

综上所述, 传统 SOR 算法的复杂度为 $4kM^2 + 4kM$, 而所提改进 SOR 算法总复杂度为 $4(k+1)M^2 + 4kM + 6M$ 。当更新次数为 $k = 3$ 、 $k = 4$ 和 $k = 5$ 时, 所提改进 SOR 算法和传统 SOR 算法的计算复杂度的对比如表 1 所示。从表 1 可知, 与传统 SOR 算法相比, 所提改进 SOR 算法的计算复杂度有所增加, 但是, 其计算复杂度仍比传统 MMSE 算法少一个数量级; 尽管如此, 当改进 SOR 算法收敛 ($k = 5$) 且 $\text{BER} = 10^{-5}$ 时, 其检测性能比传统 SOR 算法的 BER 性能提升了至少 4 dB, 如图 3 所示。

此外, 从式(31)可得, $\hat{x}_n^{(k+1)}$ 能够用 $\hat{x}_h^{(k)}$ 和 $\hat{x}_p^{(k)}$ 表示, 其中, $h = 1, 2, \dots, n-1$, $p = 1, 2, \dots, 2M$, 这

与 Gauss-Seidel 更新算法类似。因此，所提算法还具有 2 个显著优势，可进一步降低算法的整体计算复杂度。首先，由于下一次更新时不需要 $\hat{x}_n^{(k+1)}$ ，可用本次计算得到的 $\hat{x}_n^{(k)}$ 直接覆盖 $\hat{x}_n^{(k)}$ ，因此，只需要一个大小为 $2M+1$ 的存储矢量。其次，改进 SOR 算法更新 $\hat{x}_n^{(k+1)}$ 时，可利用当前更新已得到的 $\hat{x}_p^{(k)}$ ，进一步加快算法收敛速度和减少算法更新次数。

表 1 计算复杂度的对比

更新次数	改进 SOR 算法	SOR 算法
$k=3$	$16M^2+18M$	$12M^2+12M$
$k=4$	$20M^2+22M$	$16M^2+16M$
$k=5$	$24M^2+26M$	$20M^2+20M$

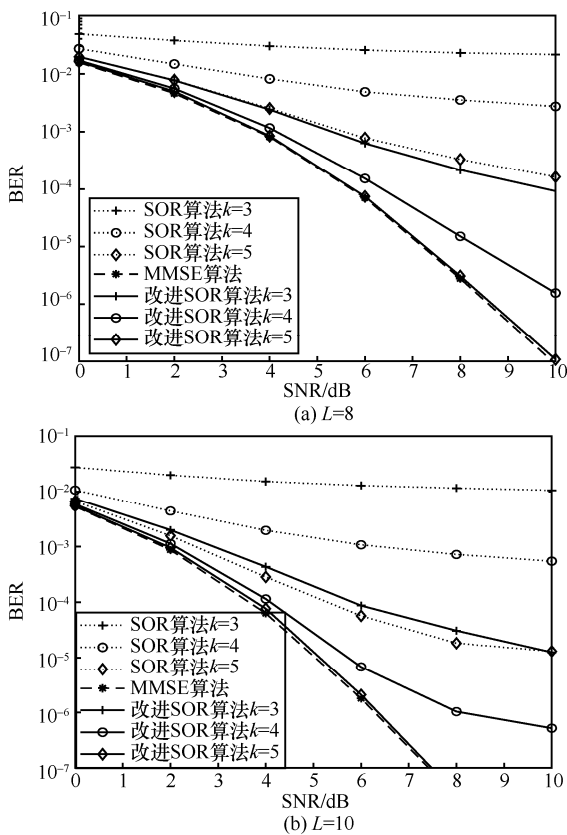


图 3 算法检测性能随信噪比对比

5 仿真与分析

为了验证所提改进 SOR 算法的检测性能，使用 MATLAB 软件进行仿真实验。采用误比特率作为检测性能的评估参数，对传统 MMSE 算法、传

统 SOR 算法和所提改进 SOR 算法的检测性能进行蒙特卡洛仿真实验。大规模 MIMO-TRDMA 系统中接收天线数设为 $N_r=128$ ，用户数设为 $M=32$ ，采用 64-正交振幅调制方案。将所提方案应用于 IEEE 802.15.4a 的室外非视距场景中，信道增益为 CSCG 随机变量，其均值为零且方差为 e^{-kT_s/σ_T} ，信道带宽 $B=500$ MHz，均方时延扩展 $\sigma_T=100/B$ ，采样周期 $T_s=1/B=2$ ns，信道多径数分别设为 $L=8$ 和 $L=10$ 。

通过仿真确定最佳松弛参数，参数设置为：更新次数 $k=3$ ，SNR=4 dB。所提改进 SOR 算法的 BER 性能与松弛参数 α 之间的关系如图 4 所示。最佳松弛参数是对应 BER 最小值的松弛参数。由图 4(a)可知，当 $L=8$ 时，传统 SOR 算法 BER 最小值为 3.01×10^{-2} ，对应最佳松弛参数 $\alpha=1.1$ ；而改进 SOR 算法 BER 最小值为 2.30×10^{-3} ，对应最佳松弛参数 $\alpha=1.2$ 。由图 4(b)可知，当 $L=10$ 时，传统 SOR 算法 BER 最小值为 1.52×10^{-2} ，对应最佳松弛参数 $\alpha=1.1$ ；而改进 SOR 算法 BER 最小值为 3.96×10^{-4} ，对应最佳松弛参数 $\alpha=1.2$ 。因此，在后面的仿真实验中，传统 SOR 算法的松弛参数设为 $\alpha=1.1$ ，改进 SOR 算法的松弛参数设为 $\alpha=1.2$ 。

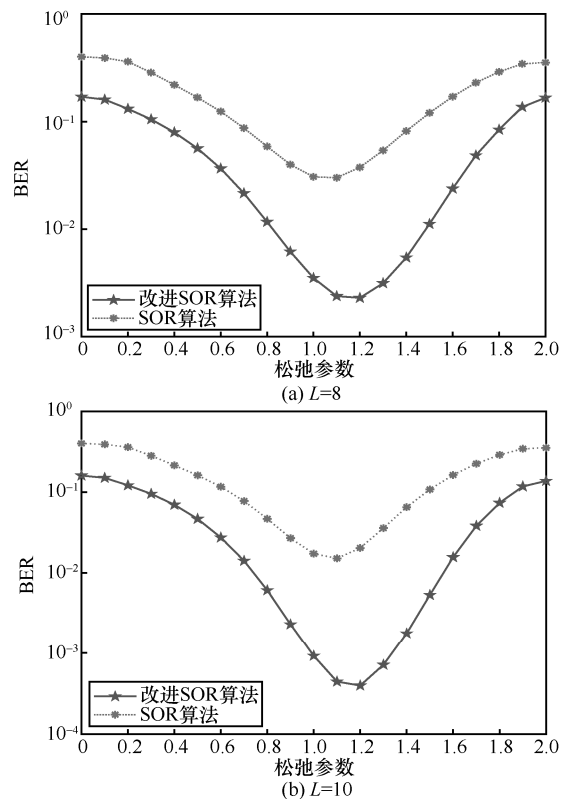


图 4 所提算法性能与松弛参数之间的关系

大规模 MIMO-TRDMA 系统中，传统 MMSE 算法、传统 SOR 算法和所提改进 SOR 算法的 BER 性能对比结果如图 3 所示。从图 3(a)可以看出，当更新次数 $k=3$ 时，改进 SOR 算法与 MMSE 算法之间存在较大差距，但性能优于传统 SOR 算法；当更新次数 $k=4$ 时，改进 SOR 算法和传统 SOR 算法的 BER 性能较更新次数 $k=3$ 时都有所提升，但仍与 MMSE 算法存在一定差距，同时，改进 SOR 算法的 BER 性能同样优于传统 SOR 算法；当更新次数 $k=5$ 时，改进 SOR 算法与传统 SOR 算法的性能持续提升，此时，改进 SOR 算法与 MMSE 算法的 BER 性能相当，同时优于传统 SOR 算法的性能。综上，当更新次数 k 相同时，改进 SOR 算法的性能优于传统 SOR 算法。这是因为改进 SOR 算法将 SD 算法和 SOR 算法的第一次混合更新解设为第一次更新解，提高后续 SOR 更新的搜索效率，具有更快的收敛速度和更好的检测性能。当更新次数 k 较少时，改进 SOR 算法与 MMSE 算法之间的性能存在一定差距；当更新次数 k 较多时，改进 SOR 算法可以取与 MMSE 算法相当的检测性能。这是由于改进 SOR 算法通过更新求解线性方程组代替复杂的矩阵求逆计算，需要通过多次更新才能获得近似 MMSE 算法的 BER 性能。同样，从图 3(b)可以得出相同结论。

大规模 MIMO-TRDMA 系统中，改进 SOR 算法和传统 SOR 算法的收敛性能对比结果如图 5 所示。从图 5(a)可以看出，当更新次数 k 为确定值时，改进 SOR 算法和传统 SOR 算法的 BER 性能都随着 SNR 的增加而明显降低；当 SNR 确定时，改进 SOR

算法和传统 SOR 算法的 BER 性能随着更新次数的增多都趋近收敛。因为改进 SOR 算法能够提高后续 SOR 更新的搜索效率，具有更快的收敛速度和更好的检测性能。当 SNR 为一确定值时，改进 SOR 算法比传统 SOR 算法的收敛速度快，具体来说，改进 SOR 算法的收敛次数为 $k=5$ ，SNR 变化对算法的收敛次数无影响；而传统 SOR 算法的收敛次数为 $k=8$ ，SNR 变化对算法的收敛次数无影响。此外，在 SNR 为一个确定值的前提下，当更新次数小于收敛次数时，改进 SOR 算法的 BER 性能明显优于传统 SOR 算法。同样，从图 5(b)可以得出相同结论。

6 结束语

在大规模 MIMO-TRDMA 系统中，传统 MMSE 算法可获得近似最佳的检测性能，但所需的矩阵求逆计算复杂度过高，无法确保信号检测的实时处理。因此，本文提出一种改进 SOR 信号检测算法。该算法通过更新求解线性方程组，避免复杂的矩阵求逆计算；同时，将 SD 算法和 SOR 算法的第一次混合更新解设为改进 SOR 算法的第一次更新解，以获得后续 SOR 更新的高效搜索方向。仿真结果表明，所提算法能以较少的更新次数获得与传统 MMSE 算法相当的近似最佳性能，且计算复杂度为较低的 $O(M^2)$ 。因此，所提改进 SOR 算法能够在检测性能和计算复杂度之间取得良好的折衷。

参考文献:

[1] PRASAD K N R S V, HOSSAIN E, BHARGAVA V K. Energy efficiency in massive MIMO-based 5G networks: opportunities and chal-

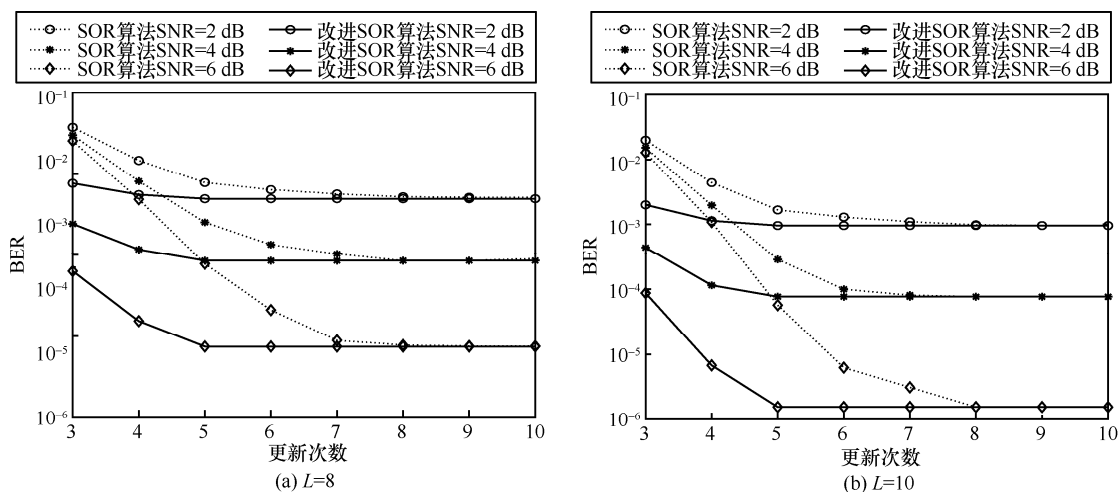


图 5 算法收敛性能对比

- lenges[J]. IEEE Wireless Communications, 2017, 24(3): 86-94.
- [2] BJÖRNSSON E, LARSSON E G, MARZETTA T L. Massive MIMO: ten myths and one critical question[J]. IEEE Communications Magazine, 2016, 54(2): 114-123.
- [3] 王海荣, 董健, 王玉辉. 大规模 MIMO 系统中基于谱分离的导频去污染[J]. 通信学报, 2020, 41(4): 197-205.
WANG H R, DONG J, WANG Y H. Pilot decontamination based on spectrum separation in massive MIMO system[J]. Journal on Communications, 2020, 41(4): 197-205.
- [4] SHEKHAR S, HOQUE S, HOSSAIN A, et al. Performance analysis of TRDMA under multi-path rician fading channel[C]// Proceeding of the Second International Conference on Microelectronics, Computing & Communication Systems (MCCS 2017). Singapore: Springer, 2018: 677-688.
- [5] HAN F, LIU K J R. A multiuser TRDMA uplink system with 2D parallel interference cancellation[J]. IEEE Transactions on Communications, 2014, 62(3): 1011-1022.
- [6] ALBREEM M A, JUNTTI M, SHAHABUDDIN S. Massive MIMO detection techniques: a survey[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2019, 21(4): 3109-3132.
- [7] 景小荣, 文晶晶, 雷维嘉. 基于切比雪夫-迹迭代的大规模 MIMO 系统软输出信号检测[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(2): 372-379.
JING X R, WEN J J, LEI W J. Soft output signal detection for massive MIMO systems based on Chebyshev trace iteration[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(2): 372-379.
- [8] ZHAO S F, SHEN B, HUA Q. A comparative study of low-complexity MMSE signal detection for massive MIMO systems[J]. KSII Transactions on Internet and Information Systems, 2018, 12(4): 1504-1526.
- [9] KRISHNAMOORTHY A, MENON D. Matrix inversion using Cholesky decomposition[C]//Proceedings of 2013 Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA). Piscataway: IEEE Press, 2013: 70-72.
- [10] CHOU C C, WU J M. Low-complexity MIMO precoder design with LDL^H channel decomposition[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2011, 60(5): 2368-2372.
- [11] FANG L C, XU L, HUANG D D. Low complexity iterative MMSE-PIC detection for medium-size massive MIMO[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2016, 5(1): 108-111.
- [12] TAHIR B, SCHWARZ S, RUPP M. Low-complexity detection of uplink NOMA by exploiting properties of the propagation channel[C]//Proceedings of 2020 IEEE International Conference on Communications (ICC). Piscataway: IEEE Press, 2020: 1-6.
- [13] DAI L L, GAO X Y, SU X, et al. Low-complexity soft-output signal detection based on gauss-seidel method for uplink multiuser large-scale MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2015, 64(10): 4839-4845.
- [14] NHAT CUONG C, HONG T T, DUC KHAI L. Hardware implementation of the efficient SOR-based massive MIMO detection for uplink[C]//Proceedings of 2019 IEEE-RIVF International Conference on Computing and Communication Technologies (RIVF). Piscataway: IEEE Press, 2019: 1-6.
- [15] YIN B, WU M, CAVALLARO J R, et al. Conjugate gradient-based

soft-output detection and precoding in massive MIMO systems[C]// Proceedings of 2014 IEEE Global Communications Conference. Piscataway: IEEE Press, 2014: 3696-3701.

- [16] QIN X B, YAN Z T, HE G H. A near-optimal detection scheme based on joint steepest descent and jacobi method for uplink massive MIMO systems[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(2): 276-279.

[作者简介]



王明月 (1990-), 女, 重庆人, 重庆邮电大学博士生, 主要研究方向为 MIMO 技术和时间反演技术。



李方伟 (1960-), 男, 重庆人, 博士, 重庆邮电大学教授, 主要研究方向为无线通信技术和移动通信安全传输技术。



景小荣 (1974-), 男, 甘肃平凉人, 博士, 重庆邮电大学教授, 主要研究方向为无线通信系统中的信号处理技术。



张海波 (1979-), 男, 重庆人, 博士, 重庆邮电大学副教授, 主要研究方向为车联网中的关键传输技术。



熊军洲 (1985-), 男, 湖北武汉人, 重庆邮电大学博士生, 主要研究方向为时间反演技术和移动通信安全传输技术。